

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XX CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA

**OPTIMIZACIÓN DE LA OPERACIÓN DEL SISTEMA EMBALSE PUCLARO
INCORPORANDO EL OBJETIVO DE GENERACIÓN HIDROELÉCTRICA**

**IGNACIO BEYA M.¹
MARCELO OLIVARES A.²**

RESUMEN

Se desarrolló una metodología para la optimización del manejo de largo plazo de recursos hídricos, aplicándola al sistema embalse Puclaro ubicado en la cuenca del río Elqui, región de Coquimbo. Esta metodología se basa en programación dinámica estocástica, específicamente en el método Value Iteration combinado con el método de aproximación de funciones mediante polinomios de Chebyshev y consiste en construir dos modelos de optimización que se utilizan conjuntamente para que, por medio de una política de operación encontrada por el primer modelo (Modelo de valor futuro del agua embalsada), se obtenga, por medio del segundo (Modelo de Re-Optimización), una secuencia óptima de operación del sistema del control de aguas de la cuenca.

¹Ingeniero civil de la Universidad de Chile - mail: ignacio.beya.m@gmail.com

²Profesor Asistente, Departamento Ing. Civil, Universidad de Chile – mail: maroliva@ing.uchile.cl

1. INTRODUCCIÓN

Bajo el marco de las modificaciones a la ley eléctrica chilena que favorecen la incorporación de energías renovables no convencionales a la red, se construyó, en mayo del año 2008, la central hidroeléctrica Puclaro, asociada al embalse del mismo nombre y ubicada en el valle del Elqui, región de Coquimbo. Ésta central fue concebida como una central de pasada, de tal manera de no interferir con la operación del embalse, que privilegia el uso del agua para riego. La energía producida en esta central es vendida a la central termoeléctrica Guacolda a un precio fijo y desde ahí se inyecta al Sistema Interconectado Central.

Las operaciones del embalse Puclaro se realizan en forma coordinada con el embalse La Laguna, estableciendo una seguridad de riego del 85% a todos los propietarios de acciones de agua representados por *La Junta de Vigilancia del Río Elqui y sus afluentes* (JVREA), entidad encargada de administrar el agua disponible en la cuenca y es responsable de la operación de ambos embalses.

En la figura N°1 se muestra la ubicación referencial de los embalses La Laguna y Puclaro dentro de la cuenca del río Elqui.

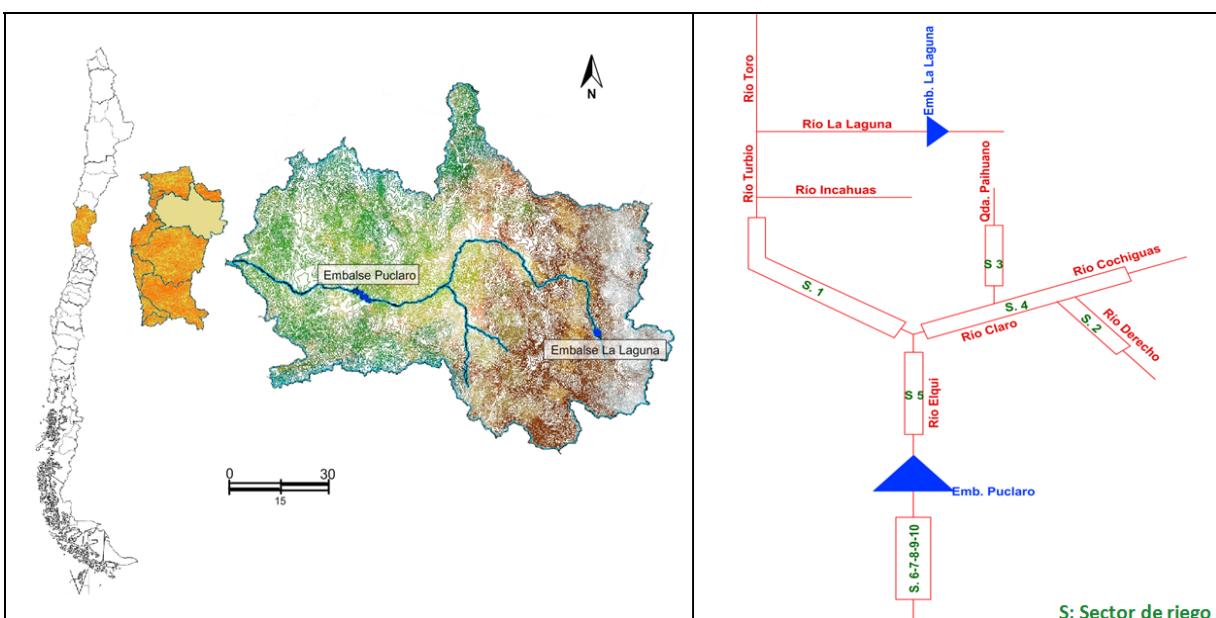


Figura N°1: Ubicación de embalses La Laguna y Puclaro, y esquema de la cuenca del río Elqui.

El Objetivo general de este trabajo es explorar posibles mejoras en la operación de los recursos hídricos en la cuenca del río Elqui, que permitan eventualmente, aumentar la generación de energía en la central hidroeléctrica Puclaro sin perjuicio de la actividad agrícola. Para lo anterior, se plantea desarrollar una herramienta (modelo matemático) de apoyo a la toma de decisiones del sistema de control de aguas de la cuenca, capaz de proponer una política y secuencia de operación que optimice el uso del recurso hídrico disponible, considerando la satisfacción de las demandas de riego como el objetivo más importante y utilizando un pronóstico de caudales afluentes a la cuenca.

2. METODOLOGÍA

El método de optimización empleado en este trabajo fue programación dinámica (PD) estocástica (PDE) debido que los problemas de planificación del uso de los recursos hídricos son inherentemente dinámicos y estocásticos y se deben considerar a largo plazo, además de permitir la utilización de relaciones no lineales, frecuentes cuando se considera la hidroelectricidad en el sistema (Olivares, 2008). Esta técnica se basa en el principio de optimalidad de Bellman (Bellman, 1957) y que se expresa en la ecuación (1), la cual emplea dos tipos de variables, variables de estado (representan una situación específica en un tiempo dado en el sistema) y variables de decisión (acciones que se pueden realizar a partir de un estado).

$$VF_t(s_t) = \max_a \sum_n P^n \cdot \left[U_{a, s_t, s_{t+1}^n} + \beta \cdot VF_{t+1}(s_{t+1}^n) \right] \quad (1)$$

Donde: \vec{a} es el vector de acciones posibles de realizar, n el número discreto de eventos inciertos, s_t el estado inicial, s_{t+1}^n Estado al término al haber realizado la acción a desde el estado s_t con una probabilidad P^n asociada. U_{a, s_t, s_{t+1}^n} es la utilidad inmediata de realizar la acción a desde el estado s_t y terminando en el estado s_{t+1}^n , $VF_t(s_{t+1}^n)$ el valor de las utilidades futuras que se originan a partir del estado inicial s_{t+1}^n y β el factor de descuento del valor futuro.

Por lo general, PDE ha sido implementada considerando un conjunto de estados y acciones discretos reduciendo el problema en una búsqueda de las mejores decisiones. Esta metodología utiliza el método *Value iteration*, método iterativo que se basa en PD y consiste en determinar el segundo término de la ecuación de Bellman ($VF_t(s)$), que representa el valor de las decisiones futuras utilizando un periodo de evaluación infinito. Este método, combinado con técnicas de aproximación de funciones, puede utilizarse para encontrar una aproximación continua de la función de valor futuro (en términos de los estados posibles en el sistema) y de esta forma encontrar una política de operación cercana a la óptima utilizando estados y variables de decisión continuas, optimizando la ecuación aproximada de Bellman encontrada. El algoritmo del método *value iteration* implementado en PDE se muestra figura N°2.

```

1. Inicializa  $r$   $vf(s)$  para cada  $s \in S$ 

2.  $\overline{vf}(s) = vf(s)$ 

Para cada  $s \in S$ 

3.  $vf(s) = \text{MAX}_a \sum_n P^n \cdot [U_{a,s,s^n} + \beta \cdot vf(s^n)]$ 

4.  $ERROR = \|vf(s) - \overline{vf}(s)\|$ 

Si  $ERROR > \lambda$  ir al paso N°2
Si  $ERROR < \lambda$   $\overline{VF}(S) = vf(S)$ 

Donde :
a, decisiones posibles de ejecutar
 $s, s^n$ , estados inicial y final del sistema respectivamente
 $P^n$ , probabilidad de tener minar en el estado  $s^n$ 
 $\beta$ , factor de descuento,  $0 \leq \beta < 1$ 
 $VF(s) = \text{MAX}_{a_t} \sum_{t=1}^{\infty} P^n \cdot [U_{a_t, s_t, s'_t}] \approx \overline{VF}(s)$ 
 $\lambda$ , maximo error permitido en el calculo de  $VF(S)$ 

```

Figura N°2: Algoritmo del método *value iteration* (fuente: Value iteration and policy iteration algorithms for Markov decision problem, 1996).

El método de aproximación utilizado en esta metodología fue la aproximación polinomial de Chebyshev debido que este método preserva las propiedades de monotonicidad y concavidad de la función original, propiedades que son importantes de mantener en una variada gama de problemas económicos (Judd & Solnick, 1994), y que además de satisfacer la relación de ortogonalidad continua, satisfacen la relación de ortogonalidad discreta, lo que permite definir un set de nodos $\{s^1, \dots, s^n, \dots, s^N\}$ óptimos para la interpolación de cualquier función continua (Rust, 1994).

3. MODELACIÓN MATEMÁTICA

El sistema de recursos hídricos asociado al embalse Puclaro se ha simplificado para poder modelarlo matemáticamente. Las simplificaciones más significativas tienen relación con la disminución y emplazamiento de los sectores de riego y ríos afluentes al río Elqui. En la figura N°3 se muestra el diagrama del modelo propuesto.

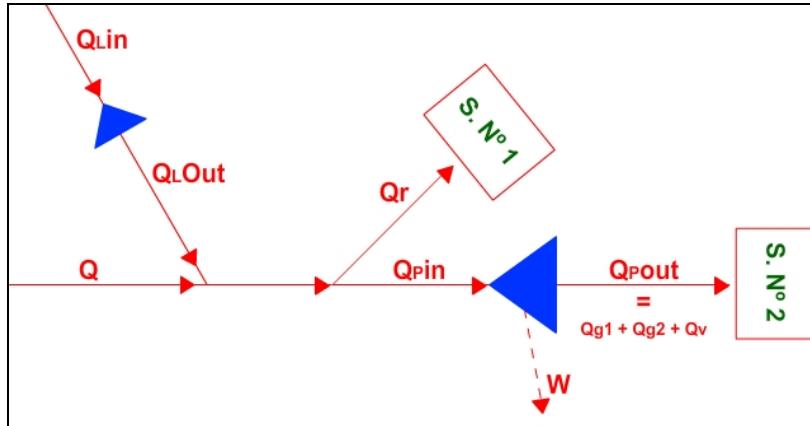


Figura N°3: Diagrama general del modelo matemático.

Donde Q es el caudal natural afluente al río Elqui de carácter aleatorio, Q_r caudal utilizado en el riego del sector N° 1 del modelo, Q_{Lin} caudal natural afluente al embalse La Laguna (aleatorio), Q_{Lout} caudal efluente del embalse La Laguna. Q_{Pin} caudal afluente al embalse Puclaro proveniente del río Elqui, Q_{Pout} caudal efluente del embalse Puclaro utilizado en el riego del sector N° 2 del modelo, Q_{g1} caudal utilizado en la turbina N° 1 para generación hidroeléctrica, Q_{g2} caudal utilizado en la turbina N° 2 para generación hidroeléctrica, Q_v caudal evacuado del embalse Puclaro sin aprovechamiento hidroeléctrico y W perdidas por infiltración y evaporación en el embalse Puclaro.

Además, el modelo considera la eficiencia de la central hidroeléctrica y se plantea con una discretización temporal mensual, debido a la baja variabilidad de los caudales efluentes de los embalses La Laguna y Puclaro, los que son administrados por la JVREA según los requerimientos agronómicos y la disponibilidad del recurso.

Las restricciones que definen el modelo y el espacio de soluciones factibles, representan las limitaciones físicas y operacionales en el sistema, además de las ecuaciones que vinculan las variables de estado y de decisión en el tiempo típicas, como lo son las ecuaciones de continuidad.

Función objetivo

En cuanto a la función objetivo, y debido a las características del problema, se consideró maximizar el valor presente neto esperado de una función utilidad en un periodo de evaluación infinito, la cual considera como beneficio la generación hidroeléctrica, y como penalidades, el déficit en la demanda de agua en los sectores de riego, dicha utilidad se expresó en términos de energía. Las expresiones matemáticas que definen la función objetivo se muestran en las siguientes ecuaciones:

$$VP = \text{MAX}_a \quad E_{EH} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot U_a(t) \right] \quad (2)$$

$$U^n(t) = G^n(t) - C^n(t) \quad (3)$$

$$G^n(t) = [eff_1^n(t) \cdot Q_{g1}(t) + eff_2^n(t) \cdot Q_{g2}(t)] \cdot hn_p^n(t) \cdot \Delta t \quad (4)$$

$$C^n(t) = [wv_1 \cdot Shi_1(t) + wv_2 \cdot Shi_2(t)] \cdot hn_p^n(t) \cdot \left[\frac{eff_1^n(t) \cdot Q_{g1} + eff_2^n(t) \cdot Q_{g2}}{Q_{g1} + Q_{g2}} \right] \cdot \Delta t \quad (5)$$

Donde VP es el máximo valor presente de la utilidad esperada total neta, $\overset{E}{EH}$ operador esperanza sobre escenarios hidrológicos EH^n , \vec{a} vector de decisiones de operación en el sistema(Q_{g1} , Q_{g2} , Q_v y Q_r), β factor de descuento mensual del valor de la utilidad futura, $U^n(t)$ utilidad neta en el mes t asociada al escenario hidrológico n , $G^n(t)$ es la producción de energía hidroeléctrica en el mes t asociado al escenario hidrológico n , $C^n(t)$ penalización por déficit en el abastecimiento de las demandas de riego en el mes t asociado al escenario hidrológico n , wv_1 y wv_2 son la relación de importancia subjetiva del déficit de agua en el sector de riego N° 1 y N°2 respectivamente.

La ecuación (2) puede expresarse como muestra la ecuación (6).

$$VP = MAX_{\vec{a}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{n=1}^N \beta^t \cdot P^n(t) \cdot U_{\vec{a}}(t) \quad (6)$$

Donde $P^n(t)$ es la probabilidad de ocurrencia del escenario hidrológico n en el mes t .

Estrategia de solución

La solución del problema de optimización se abordó utilizando el método *Value iteration*, para lo cual fue necesario redefinir la función objetivo introduciendo el concepto de función de valor futuro de Bellman. Además, el método se modificó de modo de obtener una función de valor futuro para cada mes, es decir que el ciclo de iteración contiene 12 sub secuencias. La redefinición de la función objetivo se muestra en la ecuación (7).

$$VP = VF_{t=0}(V_P(t=0), V_L(t=0)) \quad (7)$$

Donde la variable $VF_t(\cdot)$ se puede escribir en la forma de Bellman como muestra la ecuación (8), donde se hace explícita la división en sub-problemas del problema original y la recursividad de la ecuación para ser resuelta con PDE.

$$VF_t(V_P(t), V_L(t)) = MAX_{\vec{a}} \sum_{n=1}^N P_n(t) \cdot [U^n(t) + \beta \cdot VF_{t+1}(V_P(t+1), V_L(t+1))] \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que la herramienta desarrollada en este trabajo pretende encontrar una política y secuencia de operación optima, se propone la siguiente metodología para obtener lo deseado:

- Construcción del *Modelo de valor futuro del agua embalsada*, el cual entrega funciones $VF_m(\cdot)$ (política de operación), donde el subíndice m representa el mes en que la función de valor futuro del agua embalsada es válida.
- Construcción del *Modelo de Re-Optimización*, el cual utiliza las funciones de $VF_m(\cdot)$ y un pronóstico determinístico de caudales afluente a la cuenca con el objeto de planificar la secuencia de decisiones futuras (secuencia de operación).

El esquema del funcionamiento de la herramienta de apoyo de toma de decisiones desarrollada en este trabajo se muestra en la figura N°4.

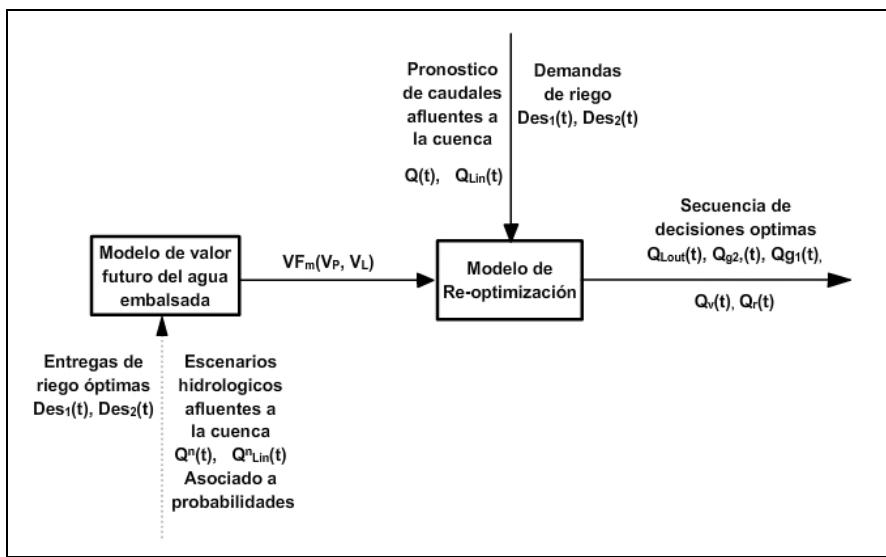


Figura N°4: Esquema del funcionamiento de la herramienta de apoyo a la toma de decisiones desarrollada en este trabajo.

Los datos de entrada del Modelo de valor futuro del agua embalsada (entregas de riego optimas, escenarios hidrológicos asociados a probabilidad de ocurrencia, etc) se obtuvieron de un análisis estadístico, mientras que para el Modelo de Re-optimización, se utilizó la estadística de registros desde el año 2004 al 2008 (pronóstico de caudales determinística igual a la serie de tiempo de caudales afluente a la cuenca).

De modo de poder, de alguna forma validar, los resultados de ambos modelos, se construyeron 3 modelos de Re-optimización, los que difieren en la función objetivo que utilizan. A continuación se describe en forma general cada uno de ellos.

Modelo de Re-optimización N° 1: recurre a la metodología clásica de re-optimización en PD, la cual utiliza la función de valor futuro al final del periodo de evaluación (T), maximizando la suma de la función utilidad en todo el periodo, mas el valor futuro del agua embalsada al término del periodo. La ecuación (9) muestra la función objetivo que utiliza este modelo.

$$VP = \sum_{t=1}^T [U(t)] + VF_{T+1}(V_P(T+1), V_L(T+1)) \quad (9)$$

Modelo de Re-optimización N° 2: a diferencia del modelo de Re-optimización original (N° 1), este modelo genera la secuencia óptima de operación considerando las funciones de valor futuro del agua embalsada al término de cada mes de simulación, de esta forma se incorpora probabilidad de ocurrencia de caudales distintos a los pronosticados. La función objetivo de este modelo se muestra en la ecuación (10).

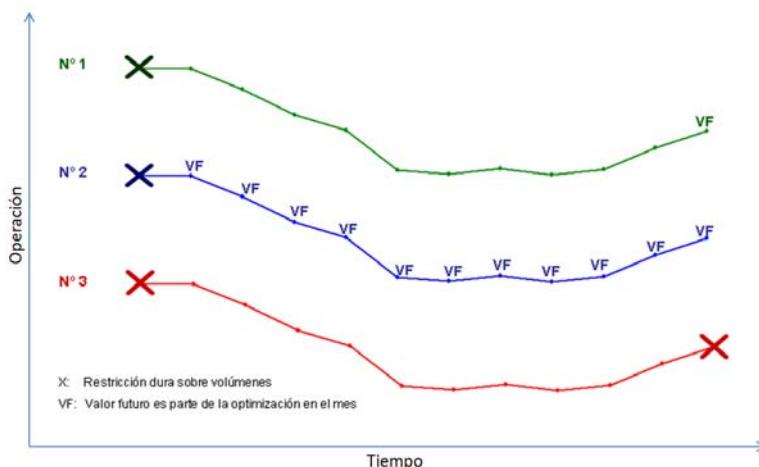
$$VP = \sum_{t=1}^T [(T - t + 1) \cdot U(t) + VF_{t+1}(V_P(t+1), V_L(t+1))] \quad (10)$$

Modelo de Re-optimización N° 3: este modelo no utiliza las funciones de valor futuro del agua embalsada, por lo que en rigor no es un modelo de Re-Optimización. En lugar de utilizar estas funciones, incorpora restricciones sobre el estado de los embalses al término del periodo de simulación y maximiza la energía generada en ese periodo. La función objetivo de este modelo se muestra en la ecuación (11).

$$VP = \sum_{t=1}^T [U(t)] \quad (11)$$

De las ecuaciones anteriores, es importante mencionar que no se considera el factor de descuento β debido a que, por razones agronómicas, no se desea priorizar las entregas de caudal en los meses más próximos por sobre los más alejados.

La figura N°5 muestra un esquema simplificado de cómo funcionan los tres modelos de Re-Optimización desarrollados.



4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Modelo de valor futuro del agua embalsada

Como se dijo anteriormente, este modelo entrega funciones de valor futuro del agua embalsada para cada mes (12). A modo de ejemplo se muestra en forma grafica en las figuras N°6 y N°7 la función de valor futuro para el mes de enero.

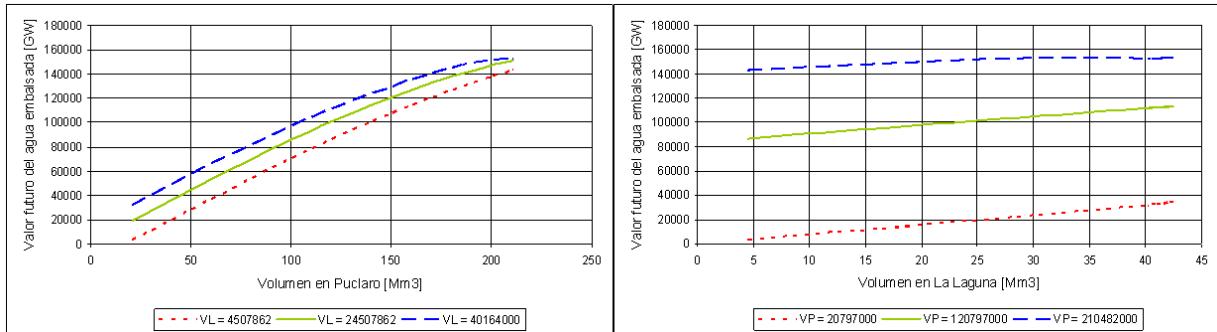


Figura N°6: Valor futuro del agua embalsada en Puclaro (Izquierda) y La Laguna (Derecha) para distintos volúmenes, y parámetros subjetivos $wv_1 = 3$ y $wv_2 = 3$.

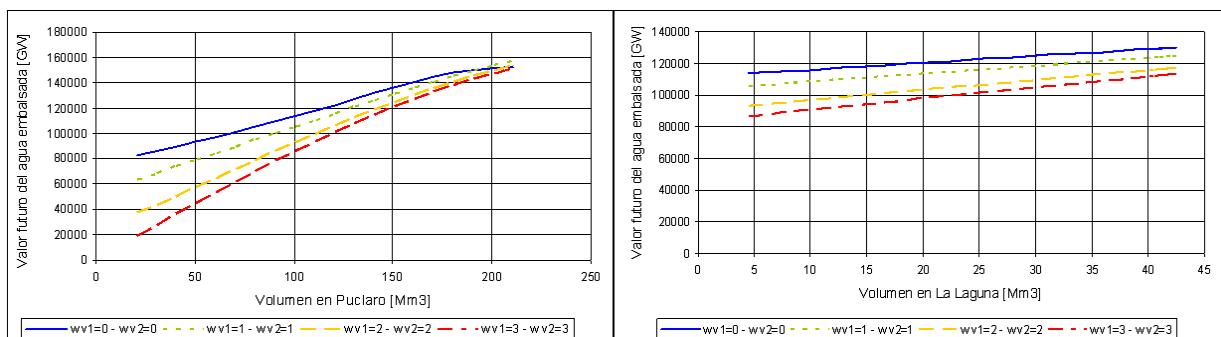


Figura N°7: Valor futuro del agua embalsada en Puclaro (Izquierda) y en La Laguna (Derecha) para un volumen medio en Puclaro y distintos valores de los parámetros subjetivos.

Como se muestra en las figuras N°6, el incremento marginal del valor futuro del agua embalsada disminuye a medida que aumenta el volumen en los embalses, donde para el embalse Puclaro se hace más notorio este efecto debido a la generación hidroeléctrica y a que de cierto nivel de volumen embalsado no se producen déficit en las entregas de agua para riego. En cuanto a la figura N°7, modificar los parámetros wv_1 y wv_2 tienen el efecto de desplazar las curvas en la vertical y modificar las pendientes. Al aumentar los parámetros wv_1 y wv_2 , las pendientes de las funciones de valor futuro aumentan, esto ocurre porque los factores wv_1 y wv_2 inciden en el valor de la función de penalización por déficit en las demandas de riego, disminuyendo el valor futuro del agua embalsada.

Modelos de Re-Optimización

En las figuras N°8 y N°9, se muestran los resultados de los modelos de Re-Optimización.

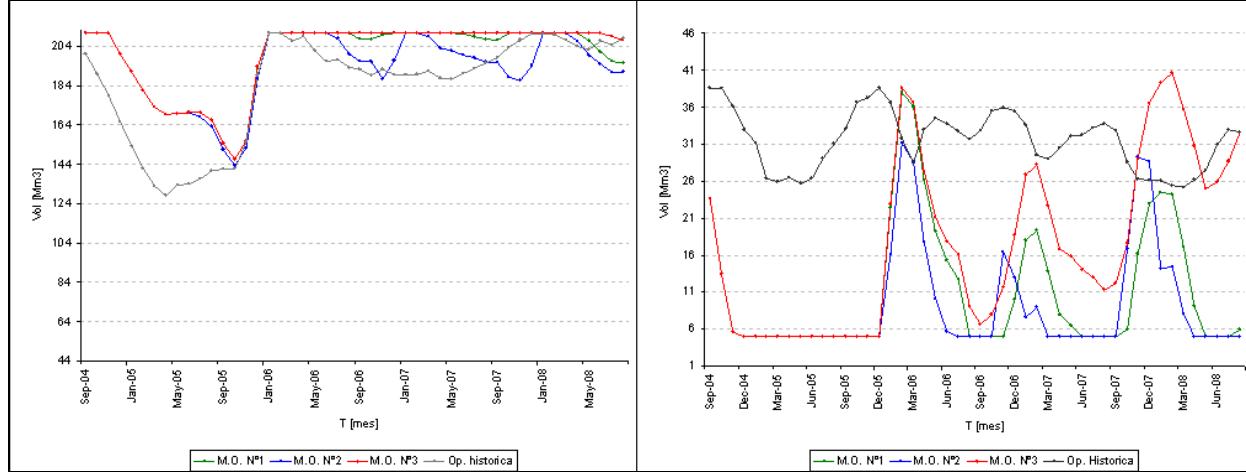


Figura N°8: Volúmenes finales de cada mes en el embalse Puclaro (izquierda) y La Laguna (derecha) durante los meses de simulación correspondientes a los años 2004–2008.

De la figura N°8 se puede notar que en general los modelos de Re-Optimización proponen una operación más conservadora del embalse Puclaro, manteniendo un mayor volumen embalsado que el histórico, de esta forma mantienen una mayor altura en el embalse aumentando la eficiencia en generación hidroeléctrica. Con respecto a los volúmenes en La Laguna, todos los modelos de Re-Optimización tienden a vaciar este embalse mientras el embalse Puclaro no esté lleno. Esto se debe a que los modelos prefieren utilizar en primera instancia los volúmenes de agua en La Laguna y mantener un nivel alto en Puclaro, lo que genera mayor eficiencia en la producción hidroeléctrica. En el periodo de verano, por lo general los caudales afluente a la cuenca son mayores, lo que permite elevar el nivel en La Laguna a pesar de la mayor demanda en estos meses. Todos los modelos de Re-Optimización proponen una secuencia de decisiones poco conservadora de la operación del embalse La Laguna.

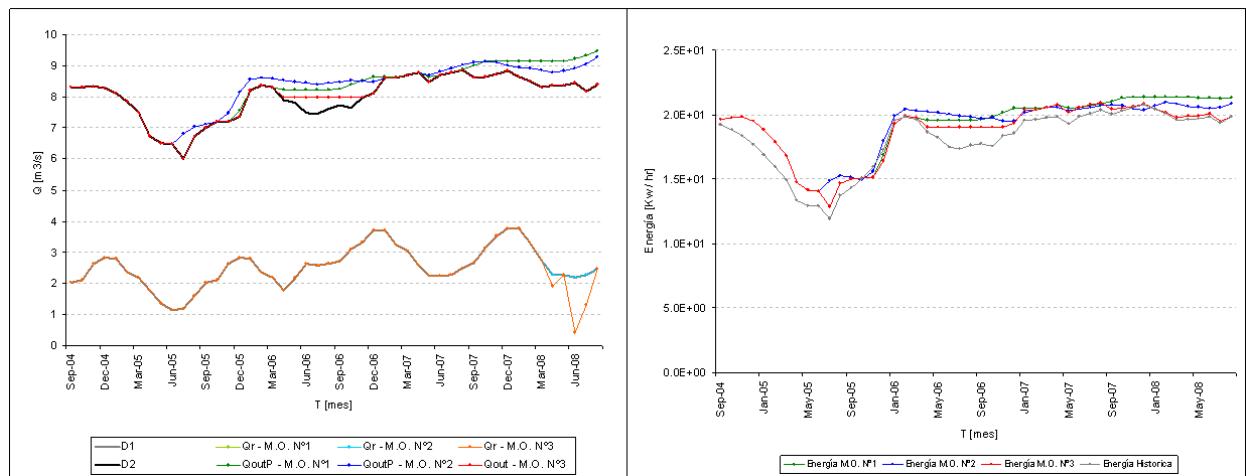


Figura N°9: Demandas históricas y entregas de riego (izquierda) y energía generada en los modelos de optimización durante el periodo de simulación (2004–2008).

De la figura N°9, todas las series de entrega al sector de riego N° 1 están sobrepuertas al requerimiento de riego, cumpliendo exactamente con el requerimiento de agua del sector de riego N° 1.

Dado que los costos por déficit de la demanda de riego son mayores a la utilidad que genera la producción hidroeléctrica, los modelos de Re-Optimización siempre preferirán suplir la necesidad de agua en los sectores de riego por sobre generar energía, esto ocurre en todas las series analizadas, donde se cumplió la demanda exigida, excepto en el modelo de Re-optimización N° 3 donde la imposición de las restricciones en los volúmenes finales de ambos embalses impiden cumplir con la demanda de riego al final del periodo de simulación.

Es importante notar que en ninguna operación se presentan vertimientos ni evacuaciones por compuerta en el embalse Puclaro.

Los modelos de Re-optimización propuestos en este trabajo, generan mayor cantidad de energía de lo que se hubiera generado con la operación histórica, obteniendo mayores beneficio relacionados con la producción hidroeléctrica y agrícolas, excepto para el modelo N° 3 donde es más discutible esta afirmación, al tener un déficit importante en la demanda de riego aguas arriba de Puclaro.

5. CONCLUSIONES

Se obtuvo una metodología robusta, en el sentido matemático, para enfrentar problemas de manejo de largo plazo de recursos hídricos, donde para el caso aplicado, el modelo de valor futuro del agua embalsada cumple un rol fundamental para encontrar la secuencia de operación óptimo que entregan los modelos de Re-Optimización, independizando a estos modelos de utilizar restricciones en los volúmenes finales y permitiendo encontrar una política y secuencia de operación que mejora notablemente la operación actual del sistema embalse Puclaro, cumpliendo con el objetivo principal de aumentar la generación hidroeléctrica sin perjuicio de la actividad agrícola.

En cuanto a los modelos de Re-Optimización y del análisis de los resultados obtenidos en los distintos modelos de *Re-Optimización* permite concluir que se desarrolló una herramienta de apoyo a la toma de decisiones que optimiza el recurso hídrico disponible en la cuenca, maximizando la producción eléctrica de la central Puclaro y considera como objetivo principal cumplir con las demandas de riego. De esta forma se espera que el trabajo realizado sea un aporte real al mejoramiento de la operación de los sistemas de control de aguas en la cuenca del río Elqui.

El modelo de *Re-Optimización N° 1* utiliza sólo una función de valor futuro en el último periodo de simulación, por lo que no considera errores en los pronósticos de caudales afluentes. Este modelo se recomienda en el caso que se dispongan buenos pronósticos de caudales afluentes a la cuenca.

El modelo de *Re-Optimización N° 2* utiliza las funciones de valor futuro del agua embalsada en cada mes de simulación, lo que considera que el pronóstico de caudales afluentes no es perfecto,

y tiene mayor incertidumbre mientras más alejado sea en el tiempo. Se recomienda apoyarse en este modelo para la toma de decisiones cuando no se posea certeza de la calidad del pronóstico de caudales afluentes a la cuenca.

El modelo de *Re-Optimización N° 3* no utiliza funciones de valor futuro del agua embalsada, sustituyéndolas por restricciones en los volúmenes finales de los embalses La Laguna y Puclaro. Además, no considera errores en los pronósticos de caudales afluentes. Su uso es recomendable cuando se necesite disponer de los embalses con un volumen de agua almacenado mayor que algún valor al final del periodo de simulación y se cuente con buenos pronósticos.

El cambio más significativo en la operación de los sistemas de control de aguas propuesto por los modelos de *Re-Optimización*, y comparado con la operación actual, está relacionado con un manejo más osado del embalse la laguna permitiendo mejorar la eficiencia de la central hidroeléctrica al mantener el embalse Puclaro con mayor cota.

Otro aspecto importante de mencionar es que por razones agronómicas se debe respetar una planificación de las entregas de riego, por lo que se optó por desarrollar una herramienta de planificación de los sistemas de control de aguas en la cuenca del río Elqui. Aún así, se destaca que la herramienta diseñada permite ser utilizada en forma dinámica en el tiempo, con el objetivo de mejorar la operación y programación de los sistemas de control, pero esto implicaría no seguir necesariamente una planificación preestablecida, lo que puede repercutir con la planificación agrícola.

Finalmente, los modelos generados en este trabajo están ajustados para ser utilizados en la cuenca del río Elqui. Sin embargo, esta metodología puede ser implementada en otras cuencas que posean uno o más embalses y centrales hidroeléctricas, y que además no necesariamente tengan como objetivo principal suplir las demandas de riego.

REFERENCIAS

Comision Nacional de Riego y Comisión Nacional de Energía. 2008. [Pagina web en internet]. <http://www.cnr.gob.cl/opensite_det_20080104144804.aspx>. [consulta: 2010 Ene 18]

Dayan Meter. Reinforcement Learning. Gatsby computational neuroscience unit. University College London.

Drud A. CONOPT. ARKI Consulting and Development. Bagsvaerd, Denmark.

Howitt R., Msangi S., Reynaud A., Knapp K. 2002. Using polynomial approximation to solve stochastic dynamic programming problems: or a “Betty Crocker” approach to SDP. Departament of agricultural and resources economics, University of California at Davis.

Isensse Martinez P. 2007. Estudio de la energía generable. Central hidroeléctrica Puclaro.

Junta de Vigilancia del Rio Elqui y sus Afluentes. 2007. [Pagina web en internet]. <<http://www.rioelqui.cl/>>. [consulta: 2010 Ene 16].

Kenneth L. Judd. 1998. Numerical methods in economics. Cambridge, Massachusstts: MIT Press.

Mariño M., Mohammadi B. 1984. Multipurpose reservoir operation, 1 Monthly model for a single reservoir, *J. Hydrology*. Vol 69(1):1-14.

Nandalal W. K. D., Bogardi J. Janos. 2007. Dynamic Programming Based Operation of Reservoirs, Applicability and Limits. New York, United States of America: Advisory Board.

Olivares, M. A. 2008. Optimal Hydropower Reservoir Operation with Environmental Requirements. Memoria para optar al título de Doctor de Filosofía en Ingeniería Civil y Ambiental. Universidad de California Davis.

Picchio M^a. C., Ojeda Bär N. 2006. Programación dinámica, Monografía UMA.

Rosenthal R. 2008. GAMS – A user's guide. GAMS Development Corporation. Washington DC, USA.

Rust J. 1996. Numerical Dynamic Programming in Economics. North Holland: Handbook of Computational Economics Elsevier.

Seok-Ku K., Darrell G., Fontane and John W. Labadie. 1987. Multiobjective optimization of reservoir system operation. *Water Resour. Res.* Vol. 23(6):983-996.

Tejada-Guibert, J. A., S.A. Johnson, J.R. Stedinger. 1995. The value of hydrologic information in Stochastic dynamic programming models of a multi-reservoir system. *Water Resour. Res.* Vol. 31(10):2571-2579.

Trezos T., Yeh W. Use of stochastic dynamic programming for reservoir management. *Water Resour. Res.* Vol. 23(6):983-996.

Yakowitz S. 1982. Dynamic programming applications in water resources. *Water Resour. Res.* Vol. 18(4):673-696.